Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante

Alain CONNES et Nigel HIGSON

Résumé — Nous montrons que les classes d'homotopie stable de morphismes asymptotiques d'une C* algèbre A vers une C* algèbre B forment un groupe abélien E(A, B) et que le foncteur bivariant ainsi construit est le foncteur universel semi-exact dont l'existence abstraite a été démontrée par le second auteur. La théorie ainsi obtenue est une amélioration et une simplification de la théorie bivariante de Kasparov : KK(A, B).

Deformations, asymptotic morphisms and bivariant K-theory

Abstract — *We whow that stable homotopy classes of asymptotic morphisms from* A *to* B, *where* A *and* B *are* C* *algebras, form an abelian group* E(A, B) *and that the corresponding bivariant functor is the universal half exact functor whose abstract existence was shown by the second author. The theory thus obtained is an improvement and a simplification of the bivariant theory* KK(A, B) *of Kasparov.*

1. INTRODUCTION. — Un foncteur F de la catégorie des C* algèbres vers celle des groupes abéliens est dit semi-exact si pour toute suite exacte courte de C* algèbres, $0 \to J \to A \to B \to 0$ la suite correspondante de groupes abéliens est exacte en F(A). On ne sait toujours pas si le foncteur bivariant KK de Kasparov est semi exact, mais dans [7] le second auteur (N.H.) a montré l'existence d'un foncteur bivariant E(A, B) universel semi-exact. Dans cette Note nous montrons comment réaliser concrètement ce bifoncteur, grâce à la notion de morphisme asymptotique de C* algèbres. Cette notion est intimement reliée d'une part à la cohomologie cyclique asymptotique, introduite dans [1] et définie par des familles à un paramètre (φ_t), $t \in \mathbb{R}^+$, de cocycles, et d'autre part à la notion de fibré presque plat et de représentation asymptotique introduite dans [2]. La théorie E(A, B) ainsi obtenue est identique à KK(A, B) quand A est K nucléaire [10] mais est semi-exacte en ses deux variables en toute généralité.

2. DÉFORMATIONS DE C* ALGÈBRES ET MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — Soient A et B deux C* algèbres; nous appellerons déformation de A en B la donnée d'un champ continu $(A(t), \Gamma)$ de C* algèbres sur [0,1] dont la fibre en 0 est $A(0)=A$ et dont la restriction à]0,1] est le champ de fibre $A(t)=B$, $t \neq 0$ (*cf.* [5], def. 10.3.1). Il existe par hypothèse pour tout $a \in A$ une section continue $\alpha \in \Gamma$ telle que $\alpha(0)=a$. Choisissons un tel $\alpha=\alpha(a)$ pour tout $a \in A$ et posons : $\varphi_t(a)=\alpha_{1/t}(a) \in B$, $t \in [1, \infty[$, $a \in A$. On vérifie alors en utilisant la continuité, pour toute section continue $\beta \in \Gamma$ de la fonction $t \to \|\beta_t\| \in \mathbb{R}_+$, que la famille φ_t d'applications de A dans B vérifie les conditions suivantes :

(1) Les applications $t \to \varphi_t(a) \in B$ sont continues (en norme) pour tout $a \in A$.

(2) Pour tous $a, a' \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$, on a (en norme) :

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi_t(a)+\lambda\varphi_t(a')-\varphi_t(a+\lambda a'))=0$$

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi_t(aa')-\varphi_t(a)\varphi_t(a'))=0$$

$$\lim_{t \to \infty} (\varphi_t(a)^*-\varphi_t(a^*))=0.$$

Note présentée par Alain CONNES.

0764-4442/90/03110101 $ 2.00

On adopte alors la définition générale suivante :

DÉFINITION 1. — *Soient* A, B *deux* C^* *algèbres; on appelle morphisme asymptotique de* A *dans* B *la donnée d'une famille* φ_t *d'applications de* A *dans* B *vérifiant les conditions* (1) *et* (2).

Nous dirons que deux morphismes asymptotiques (φ_t) et (φ'_t) sont équivalents quand $\lim_{t\to\infty}(\varphi'_t(a)-\varphi_t(a))=0$, $\forall a\in A$. Pour toute C^* algèbre B, notons B_∞ le quotient de la C^* algèbre $C_b([1, \infty[, B)$ des fonctions continues bornées à valeurs dans B par l'idéal $C_0([1, \infty[, B)$ des fonctions nulles à l'infini. Les classes d'équivalence de morphismes asymptotiques de A dans B correspondent exactement aux morphismes de A dans B_∞, en posant $(\tilde{\varphi}(a))_t=\varphi_t(a)$, $\forall a\in A$, $t\in[1, \infty[$. Pour tout morphisme asymptotique (φ_t) on a $\overline{\lim_{t\to\infty}}\|\varphi_t(a)\|\leqq\|a\|$ pour tout $a\in A$. Nous dirons que (φ_t) est *injectif* si $\underline{\lim}\|\varphi_t(a)\|\neq 0$, $\forall a\neq 0$, *i.e.* si $\tilde{\varphi}$ est injectif.

La donnée d'une déformation de A en B équivaut à celle de la classe d'équivalence du morphisme asymptotique (φ_t) que nous lui avons associée ci-dessus, et l'on obtient ainsi tous les morphismes asymptotiques injectifs de A dans B. Tout morphisme asymptotique φ de A dans B est équivalent à la composition $\psi\circ p$ d'une déformation de A/J en B avec l'application quotient $A \xrightarrow{p} A/J$, où J est un idéal bilatère fermé de A.

DÉFINITION 2. — *Deux morphismes asymptotiques* $(\varphi_t^i) : A\to B$, $i=0,1$ *sont homotopes s'il existe un morphisme asymptotique* (φ_t) *de* A *dans* $B[0,1]=B\otimes C[0,1]$ *dont l'évaluation en* $i=0,1$ *redonne* φ_t^i.

L'homotopie est une relation d'équivalence entre morphismes asymptotiques et on notera [[A, B]] l'ensemble des classes d'homotopie obtenu ainsi. Un changement de paramètre $r(t)\to\infty$, *i.e.* le remplacement de (φ_t) par $(\varphi_{r(t)})=(\psi_t)$ ne change pas la classe d'homotopie correspondante.

3. COMPOSITION DES MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — Soient $(\varphi_t)_{t\in[1, \infty[}$, $\varphi_t : A\to B$ un morphisme asymptotique et $K\subset A$ un compact de A (pour la norme). Nous dirons que (φ_t) est *uniforme* sur K si l'application $(t, a)\to\varphi_t(a)$ de $[1, \infty[\times K$ dans B est continue et si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $T<\infty$ avec pour tout $t\geqq T$:

(α) $\|\varphi_t(a)+\lambda\varphi_t(a')-\varphi_t(a+\lambda a')\|<\varepsilon$, $\forall a, a'\in K$, $\forall\lambda$, $|\lambda|\leqq 1$.

(β) $\|\varphi_t(a)\varphi_t(a')-\varphi_t(aa')\|<\varepsilon$, $\forall a, a'\in K$.

(γ) $\|\varphi_t(a)^*-\varphi_t(a^*)\|<\varepsilon$, $\forall a\in K$.

(δ) $\|\varphi_t(a)\|<\|a\|+\varepsilon$, $\forall a\in K$.

Le théorème de sélection continue de Bartle-Graves montre en utilisant B_∞ que dans la classe d'équivalence de tout morphisme asymptotique (φ_t) il en existe un (φ'_t) qui est uniforme sur tout compact K de A.

Soit $\mathscr{A}\subset A$ une sous algèbre involutive dense de A qui est une réunion dénombrable $\mathscr{A}=\cup K_n$ de compacts K_n de A, ou de manière équivalente qui est engendrée par un compact de A. On peut choisir les K_n de telle sorte que $K_n+K_n\subset K_{n+1}$, $K_n K_n\subset K_{n+1}$ et $\lambda K_n\subset K_n$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$, $|\lambda|\leqq 1$. Pour tout compact K de $\mathscr{A}$ il existe alors n tel que $K\subset K_n$.

Tout morphisme asymptotique (φ_t) de $\mathscr{A}$ dans B uniforme sur tout compact de $\mathscr{A}$ se prolonge en un morphisme asymptotique $(\bar{\varphi}_t)$ de A dans B, unique à équivalence près.

LEMME 3. — *Soient* $(\varphi_t) : A\to B$, $(\psi_t) : B\to C$ *des morphismes asymptotiques de* C^* *algèbres. On suppose que* (φ_t) *est uniforme sur tout compact de* $\mathscr{A}$, *sous algèbre involutive dense et* σ-*compacte de* A, *et que* (ψ_t) *est uniforme sur tout compact de* B. *Il existe alors* *une fonction continue croissante* $r(t):[1, \infty[\to [1, \infty[$ *telle que pour toute fonction continue croissante* $s(t) \geqq r(t)$ *la composition* $\theta_t = \psi_{s(t)} \cdot \varphi_t$ *soit un morphisme asymptotique de* $\mathscr{A}$ *dans* C *uniforme sur tout compact.*

Démonstration. — Écrivons comme ci-dessus $\mathscr{A} = \bigcup K_n$ et soient $t_n \in [1, \infty[$ tels que φ_t vérifie les conditions (α), (β), (γ) et (δ) sur K_n pour $\varepsilon = 1/n$, $t \geqq t_n$. De même soient K'_n les compacts de B, $K'_n = \{ \varphi_t(a); a \in K_{n+3}, t \leqq t_{n+1} \}$ et $r_n \in [1, \infty[$ tels que ψ_t vérifie (α), (β), (γ) et (δ) sur K'_n pour $\varepsilon = 1/n$, $t \geqq r_n$. Toute fonction continue croissante r telle que $r(t_n) \geqq r_n$ convient. □

PROPOSITION 4. — *Soient* $(\varphi_t): A \to B$, $(\psi_t): B \to C$ *des morphismes asymptotiques de* C* *algèbres, uniformes sur tout compact.*

(1) *Pour toute sous algèbre involutive dense* σ-*compacte* $\mathscr{A} \subset A$ *et toute fonction continue croissante* $s(t):[1, \infty[\to [1, \infty[$ *suffisamment grande, le prolongement* $\bar{\theta}_t$ *à* A *de la composition* $\psi_{s(t)} \cdot \varphi_t : \mathscr{A} \to C$ *définit un morphisme asymptotique de* A *dans* C.

(2) *La classe d'homotopie* $[\bar{\theta}] \in [[A, C]]$ *ne dépend que des classes d'homotopie* $[\varphi] \in [[A, B]]$ *et* $[\psi] \in [[B, C]]$.

(3) *La composition* $[\psi] \circ [\varphi]$ *des classes d'homotopie est associative.*

Démonstration. — (1) Résulte du lemme 3. (2) La sous algèbre involutive de A engendrée par deux sous algèbres σ-compactes est encore σ-compacte, on en déduit que la classe d'homotopie de $\bar{\theta}_t$ ne dépend pas du choix de $\mathscr{A}$. La possibilité de composer les homotopies permet de conclure. (3) La sous algèbre involutive de B engendrée par les $\varphi_t(\mathscr{A})$ où (φ_t) est uniforme sur tout compact de $\mathscr{A}$ est encore σ-compacte, d'où la conclusion. □

Notons enfin que le lemme suivant permet de définir le produit tensoriel de morphismes asymptotiques $(\varphi_t): A \to C$ et $(\psi_t): B \to D$ comme un morphisme asymptotique, unique à équivalence près, de $A \underset{\max}{\otimes} C$ dans $B \underset{\max}{\otimes} D$, noté $\varphi \otimes \psi$. De plus l'opération $\varphi, \psi \to \varphi \otimes \psi$ passe aux classes d'homotopie.

LEMME 5. — *Soient* A, B, C *des* C* *algèbres et* (φ_t), (ψ_t) *des morphismes asymptotiques* $\varphi: A \to C$, $\psi: B \to C$, *tels que pour tout* $a \in A$, $b \in B$ *le commutateur* $[\varphi_t(a), \psi_t(b)]$ *converge vers* 0 *en norme. Il existe alors un morphisme asymptotique* $(\theta_t): A \underset{\max}{\otimes} B \to C$ *unique à équivalence près, tel que* $\theta_t(a \otimes b) - \varphi_t(a)\psi_t(b) \to 0$, $\forall a \in A$, $b \in B$.

Démonstration. — Immédiat en utilisant C_∞. □

4. LA CATÉGORIE ADDITIVE E. — Soit E la catégorie dont les objets sont les C* algèbres séparables et ayant pour morphismes de A vers B l'ensemble

$$E(A, B) = [[SA \otimes \mathscr{K}, SB \otimes \mathscr{K}]]$$

des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques, où $SA = C_0(\mathbb{R}) \otimes A$, et $\mathscr{K}$ est la C* algèbre élémentaire des opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert séparable. La composition des morphismes est donnée par la composition des classes d'homotopie de morphismes asymptotiques.

L'isomorphisme naturel de $M_2(\mathscr{K}) = M_2(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{K}$ avec $\mathscr{K}$ permet de définir la somme directe de deux éléments $\varphi, \psi \in E(A, B)$ grâce au morphisme asymptotique

$$\theta_t(a) = \begin{bmatrix} \varphi_t(a) & 0 \\ 0 & \psi_t(a) \end{bmatrix}$$

avec des notations évidentes.

Proposition 6. — *Dotée de l'opération de somme directe, la catégorie* E *est une catégorie additive.*

Démonstration. — Immédiat : on utilise la réflexion $s \to -s$ de $C_0(\mathbb{R})$ pour obtenir l'inverse $-[\varphi]$ d'un élément $[\varphi] \in E(A, B)$. □

Notons j le foncteur de la catégorie C* Alg des C* algèbres (séparables) et * homomorphismes vers la catégorie E, qui à $\rho : A \to B$ associe la classe d'homotopie du morphisme asymptotique $\varphi_t = \rho \otimes \mathrm{id}$ de $SA \otimes \mathscr{K}$ dans $SB \otimes \mathscr{K}$.

Le résultat essentiel de cette Note est l'identité de la catégorie E ci-dessus avec celle construite par N.H. dans [7]. Plus précisément E est caractérisée par les résultats suivants :

Théorème 7. — (1) *Le bifoncteur* E(A, B) *de la catégorie* C* Alg *vers celle des groupes abéliens est semi-exact en chacun de ses arguments.*

(2) *Tout foncteur* F *de la catégorie* C* Alg *vers celle des groupes abéliens, qui est stable* (i.e. *ne change pas quand on remplace* A *par* $A \otimes \mathscr{K}$), *invariant par homotopie et semi-exact se factorise à travers la catégorie* E.

Comme le foncteur j : C* Alg → E vérifie les hypothèses du corollaire suivant, celui-ci caractérise E.

Corollaire 8. — *Soit* F : C* Alg → X *un foncteur dans une catégorie additive* X, *qui est stable, invariant par homotopie, et semi-exact comme bifoncteur vers la catégorie des groupes abéliens. Alors* F *se factorise uniquement à travers* E.

Comme la K-théorie bivariante a une caractérisation semblable en remplaçant la semi-exactitude par l'exactitude pour les suite exactes scindées [6] on obtient :

Corollaire 9. — (*a*) *Le foncteur* j : C* Alg → E *se factorise canoniquement à travers la catégorie* KK *de Kasparov.*

(*b*) *La flèche correspondante* KK(A, B) → E(A, B) *est un isomorphisme dès que* A *est* K-*nucléaire.*

Le (*b*) résulte de [10] et du théorème 7 (2).

5. Morphismes asymptotiques et suites exactes de C* algèbres. — Dans cette section nous donnons les étapes essentielles de la démonstration du théorème 7 (1) tout en explicitant la flèche naturelle de KK(A, B) vers E(A, B) du corollaire 9. On a en fait une flèche naturelle de Ext(A, SB) vers E(A, B) grâce au lemme suivant :

Lemme 10. — (*a*) *Soit* $0 \to J \to A \xrightarrow{p} B \to 0$ *une suite exacte de* C* *algèbres* (*séparables*). *Soit* $(u_t)_{t \in [1, \infty[}$ *une unité approchée quasi centrale continue en norme,* $0 \leqq u_t \leqq 1$, $u_t \in J$. *Alors l'égalité suivante définit un morphisme asymptotique* $(\varphi_t) : SB \to J$:

$$\varphi_t(f \otimes b) = f(u_t)\, b', \qquad \forall f \in C_0(]0,1[), \quad b \in B$$

où $b \to b'$ *est une section arbitraire de la projection* p.

(*b*) *La classe* ε_A *d'homotopie de* φ *ne dépend que de la suite exacte donnée.*

Démonstration. — (*a*) Résulte du lemme 5 (*b*). Immédiat. □

Si $(A(t), \Gamma)$ est une déformation de A en B (section 2), il lui correspond la suite exacte $0 \to SB \to C \to A \to 0$ où C est la C* algèbre du champ continu $A(t)$ restreint à [0,1[. On vérifie que le morphisme asymptotique $\psi : SA \to SB$ associé à cette suite exacte par le lemme 10 n'est autre (à homotopie près) que $1 \otimes \varphi$ où φ est associé à la déformation (section 2). La E-théorie est ainsi le quotient par homotopie de la théorie des extensions.

Comme la K-théorie bivariante de Kasparov KK(A, B) peut se définir à partir d'extensions particulières (cf. [8], § 7), on déduit du lemme 10 une flèche canonique de KK(A, B) vers E(A, B).

Esquissons la démonstration du théorème 7 (1). — Soient $0 \to J \to A \xrightarrow{p} B \to 0$ une suite exacte de C* algèbres et C_p le cône de l'application p en C_p provient de la suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to J(]0,1[) \to A([0,1[) \to C_p \to 0$$

et on a une inclusion naturelle $0 \to J \xrightarrow{i} C_p \to CB \to 0$ où CB est le cône de l'algèbre B, $CB = B([0,1[)$. Les deux résultats essentiels sont alors :

LEMME 12. — (*a*) *La flèche i est un isomorphisme* $J \cong C_p$ *dans la catégorie* E, *avec pour inverse l'élément de* $E(C_p, J)$ *associé par le lemme* 10 *à la suite exacte* (*).

(*b*) *L'application de suspension* $\varphi \to 1 \otimes \varphi$ *de* E(A, B) *vers* E(SA, SB) *est un isomorphisme.*

On peut alors dans le problème de semi-exactitude des foncteurs E(A, .) et E(., B) remplacer l'idéal J par le cône C_p de l'application p, ce qui suffit pour le premier cas. En utilisant (*b*) on conclut de même pour le deuxième cas.

6. EXEMPLES DE MORPHISMES ASYMPTOTIQUES. — (*a*) Soient M une variété Riemannienne compacte, T* M son espace cotangent. Considérons la déformation naturelle de l'algèbre des fonctions sur T* M associée à la quantification de Weyl, on obtient ainsi une déformation (au sens de la section 2) de la C* algèbre $C_0(T^* M)$ en la C* algèbre élémentaire $\mathscr{K}$ des opérateurs compacts dans $L^2(M)$.

L'objet géométrique qui systématise cette déformation est le groupoide tangent de M. L'élément correspondant de $E(C_0(T^* M), \mathbb{C})$ est l'indice analytique.

(*b*) Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe et soit K un sous groupe compact maximal de G, $\alpha : K \to \operatorname{Aut} V$ la représentation d'isotropie de K dans l'espace V tangent à G/K en K. A la déformation naturelle du groupe $V \rtimes_\alpha K = G_0$ (produit semi-direct de V par K) en le groupe G correspond une déformation de $C^*(G_0) = A$ en $B = C^*(G)$. L'élément correspondant de E(A, B) est l'induction de Dirac [12].

(*c*) Soit A une C* algèbre asymptotiquement abélienne *i. e.* on suppose avoir un groupe à un paramètre $(\sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'automorphismes de A tels que $\| [a, \sigma_t(b)] \| \to 0$, $\forall a, b \in A$. Le lemme 5 donne alors un morphisme asymptotique Δ de $A \underset{\max}{\otimes} A$ vers A tel que $\Delta_t(a \otimes b) = a\,\sigma_t(b), \forall a, b \in A$. On vérifie que l'on peut alors utiliser Δ comme le morphisme diagonal des algèbres commutatives, ce qui donne une structure d'anneau sur K(A).

(*d*) Soient A une C* algèbre séparable et π une représentation de A dans l'espace de Hilbert séparable $\mathfrak{h}$ telle que $x \in A$, $\pi(x) \in \mathscr{K} \Rightarrow x = 0$, où $\mathscr{K}$ est l'algèbre des opérateurs compacts. Soit A′ la C* algèbre commutant de A dans $\mathscr{K}_\infty = C_b([1, \infty[, \mathscr{K}) / C_0([1, \infty[, \mathscr{K})$, *i. e.*

$$(x(t))_{t \in [1, \infty[} \in A' \iff \| [x(t), a] \| \underset{t \to \infty}{\to} 0, \qquad \forall a \in A.$$

Le théorème d'unicité de Voiculescu [11] montre que la C* algèbre A′ ne dépend pas du choix de π. Le lemme 5 définit une morphisme asymptotique φ_A de $A \underset{\max}{\otimes} A'$ dans $\mathscr{K}$ tel que $\varphi_t(a \otimes (x(t))) = \pi(a)\, x(t)$ pour $a \in A$ et $x \in A'$. De plus, la proposition 11 montre que la flèche canonique $i : KK(A, \mathbb{C}) \to E(A, \mathbb{C})$ du corollaire 9 (*a*) se factorise à travers

$K_0(A')$, $i=i_1 \circ i_2$ où $i_1 : K_0(A') \to E(A, \mathbb{C})$ associe à $x \in K_0(A') = E(\mathbb{C}, A')$ l'élément $\varphi_A \circ (x \otimes \mathrm{id}_A)$ de $E(A, \mathbb{C})$.

(*e*) Soit X un espace compact metrisable connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Soient $\Gamma = \pi_1(X)$ son groupe fondamental et $\psi : X \to B\Gamma$ l'application classifiante du revêtement universel $\tilde{X} \underset{\pi}{\to} X$. En composant ψ avec l'applicàtion canonique [8] $\mu : K_*(B\Gamma) \to K(C^*(\Gamma))$ de la K-homologie de $B\Gamma$ vers la K-théorie de $C^*(\Gamma)$ on obtient $\mu \circ \psi_* : K_*(X) \to K(C^*(\Gamma))$. En fait cette flèche correspond au morphisme asymptotique suivant de la C* algèbre $C(X)'$ [*cf.* exemple (*d*)] vers $C^*(\Gamma)$: Soient ν une mesure de probabilité sur X, diffuse et de support X et $\tilde{\nu}$ la relevée de ν sur le revêtement $\tilde{X}$. Comme la C* algèbre du groupoide fondamental G de X (muni de la mesure $\tilde{\nu}$ sur chacun des G^x, $x \in X$) est Morita équivalente à $C^*(\Gamma)$ il suffit de construire un morphisme asymptotique θ de $C(X)'$ vers $C^*(G, \tilde{\nu})$ [9]. Soit alors s : $\tilde{\mathscr{U}} \subset G \to \mathscr{U} \subset X \times X$ un isomorphisme local du groupoïde G avec le groupoïde $X \times X$ (*cf.* [1]). On obtient θ en posant :

$$\theta_t((k_t)) = \sum_{i-1}^{m} (\varphi_i k_i \varphi_i) \circ s$$

où $\sum_{i=1}^{m} \varphi_i^2 = 1$ est une partition de l'unité convenable sur X, et où tout élément $k \in C(X)'$ est représenté par un noyau asymptotique $k_t(x, y)$; $x, y \in X$ en utilisant la représentation canonique π de $C(X)$ dans $L^2(X, \mu)$.

Note remise et acceptée le 21 mai 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. CONNES et MOSCOVICI, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic group, *Topology* (à paraître).

[2] A. CONNES, M. GROMOV et H. MOSCOVICI, Conjecture de Novikov et fibrés presque plats, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 310, série I, 1990, p. 273-277.

[3] J. CUNTZ, A new look at KK theory, *K-theory*, 1, 1987, p. 31-51.

[4] J. CUNTZ et G. SKANDALIS, Mapping cones and exact sequences in KK theory, *J. Operator theory*, 15, 1986, p. 163-180.

[5] J. DIXMIER, *Les C* algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[6] N. HIGSON, A characterization of KK theory, Pacific J. Math., 126, 1987, p. 253-276.

[7] N. HIGSON, *Categories of fractions and excision in KK theory*, Preprint, University of Pennsylvania, Philadelphia.

[8] G. G. KASPAROV, The operator K functor and extensions of C* algebras, *Math. U.S.S.R. Izv*, 16, 1981, p. 513-572.

[9] J. RENAULT, A groupoid approach to C* algebras, *Lecture notes in Math.*, 793, Springer, 1980.

[10] G. SKANDALIS, Une notion de nucléarité en K théorie, *K theory*, 1, 1988, p. 549-574.

[11] D. VOICULESCU, A non commutative Weyl von Neumann theory, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, 21, 1976, p. 97-113.

[12] A. WASSERMAN, Une démonstration de la conjecture de Connes-Kasparov, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 304, série I, 1987, p. 559.

A. C. : *I.H.E.S.*, 35, *route de Chartres*, 91440 *Bures-sur-Yvette;*

N. H. : *Dept. of Mathematics, Penn State University, Penn-State, U.S.A.*